Filière MP

EPREUVE DE MATHEMATIQUE II
ANALYSE

Durée : 3 heures

les machines à calculer ne sont pas autorisées.

On admet que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ existe, et on note K sa valeur. (On rappelle qu'alors $K = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$).

Toutes les applications sont à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Partie 1

Question 1

Soit f une application continue par morceaux sur $[a,b]$. Montrer que:

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t) e^{-i\lambda u} dt = 0.$$

(On pourra commencer par étudier le cas des fonctions en escalier)

Question 2

Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $L > 0$, pour tout x réel:

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^L f(x+u) \frac{\sin(\lambda u)}{u} du = K f(x).$$

On pourra considérer la fonction $u \to \frac{f(x+u) - f(x)}{u}$.

Question 3

Soit f une application intégrable sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout x réel:

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^{\infty} f(x+u) \frac{\sin(\lambda u)}{u} du = K f(x).$$

Partie 2

Soit f une application intégrable sur $\mathbb{R}$.

Question 1

Montrer que pour tout x réel, l'application g définie par $g(t)=f(t)e^{-ixt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On définit ainsi une application $\hat{f}$, appelée transformée de Fourier de f par:

$$\hat{f}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}dt .$$

Question 2

On suppose que f est une application paire. Montrer que $\hat{f}$ est aussi une application paire, et que:

$$\hat{f}(x)=2\int_0^{+\infty} f(t)\cos(xt)dt .$$

Enoncer un résultat analogue lorsqu'on suppose f impaire.

Question 3

Dans cette question a est un réel strictement positif.

a) Déterminer la transformée de Fourier de l'application f définie par: $f(x) = e^{-a|x|}$.

b) Déterminer la transformée de Fourier de l'application f définie par: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a}, \text{ si } x\in[-a,a] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

Question 4

Soit f l'application définie par $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

a) Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

b) Soient g l'application définie par $g(x,y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$, $C_R = [0,R]\times[0,R]$ et $D_R = \{(x,y), 0\leqslant x , 0\leqslant y , x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$.

A partir des intégrales doubles suivantes: $\iint_{C_R} g(x,y)dxdy$, $\iint_{D_R} g(x,y)dxdy$, $\iint_{D_{R\sqrt{2}}} g(x,y)dxdy$,

montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

c) Montrer que $\hat{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Déterminer alors $\hat{f}$.

Partie 3

On note E_n l'ensemble des applications de classe C^n sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout k, $0 \leq k \leq n$, $f^{(k)}$ intégrable sur $\mathbb{R}$.

Question 1

Soit f appartenant à E_0. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} \hat{f}(x) = 0$.

Question 2

Soit f appartenant à E_n. Montrer que $\hat{f}(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^n}\right)$.

On pourra commencer par montrer que ; $\forall k < n$, $\lim_{t \to \pm\infty} f^{(k)}(t) = 0$.

Question 3

Soit f appartenant à E_2. Montrer que $\hat{f}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Question 4

Soit f élément de E_0. On suppose que f est négligeable devant $\frac{1}{x^{n+2}}$ au voisinage de plus et moins l'infini. Montrer que $\hat{f}$ est de classe C^n sur $\mathbb{R}$.

Partie 4

Dans cette partie on suppose f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et intégrable sur $\mathbb{R}$.

Question 1

Montrer que pour tout Y strictement positif, pour tout x réel,

$$\int_{-Y}^{Y}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iu(x-t)}\,dt\right)du = 2\int_{-\infty}^{\infty} f(t+x)\frac{\sin(Yt)}{t}\,dt.$$

Question 2

Montrer que pour tout x réel, $\lim_{Y \to +\infty} \int_{-Y}^{Y} \hat{f}(u)e^{ixu}du = 4K f(x)$.

On admet que le résultat reste encore vrai si f est dans E_0 et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Question 3

Soit f une application dans E_0 et C^1 par morceaux telle que $\hat{f}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$.

Déterminer la transformée de Fourier de $\hat{f}$ en fonction de K et de f.

A l'aide d'une fonction f particulière, déterminer la valeur de K.

Question 4

Soit f définie par $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Déterminer $\hat{f}(x)$ puis calculer $\int_0^{+\infty}\left(\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^3}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx$.